ENSI

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES TA

DURÉE : 4 heures

PARTIE I

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y' \ln x + \frac{1}{x} y = 1$;

1° Résoudre $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]0, 1[$ et sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2° Étudier l'existence de solutions de $(\mathcal{E})$ de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3° On définit une application f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \quad \text{si } x \in]0,1[\cup]1, +\infty[, \ f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de l'application f.

4° Dresser le tableau de variation de f.

PARTIE II

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

1° Prouver que : $\forall x \in]0,1[$, $F(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$.

2° Prouver que : $\forall x \in]0,1[, \forall t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x^2}$.

En déduire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$, que l'on notera L_0.

3° Prouver qu'on ne modifie pas l'existence et la valeur éventuelles de $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ en remplaçant $\frac{1}{\ln t}$ par $\left(\frac{1}{\ln t} - \varphi(t)\right)$ où φ est une application continue et bornée sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. En déduire que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$. Calculer cette dernière limite, que l'on notera L_1.

4° On définit une application G de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$, si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$G(0) = L_0$ et $G(1) = L_1$.

Prouver que $G = F$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Tournez la page S. V. P.

Partie III

1° Étudier et représenter graphiquement l'application F (= G).
On précisera le signe de F' et F'', sur leurs domaines de définition respectifs, ainsi que la branche infinie.

2° Préciser la tangente au point d'abscisse $x = 1$, ainsi que le rayon et le centre de courbure en ce point.

Partie IV

On se propose de retrouver $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ par une autre méthode.

Soit H l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $H(x, y, z) = z^{x^2+y^2}$ si $z > 0$ et $H(x, y, 0) = 0$.
Soit A_α le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout α de $]0, 1[$, par $A_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ et } \alpha \leqslant z \leqslant 1\}$.
Soit J_α l'intégrale triple $J_\alpha = \iiint_{A_\alpha} H(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

1° Préciser la nature géométrique de A_α.

2° Prouver la continuité de H sur A_α ; H est-elle continue en un point $(a, b, 0) \neq (0, 0, 0)$? H est-elle continue en (0, 0, 0) ?

3° Exprimer J_α sous la forme $J_\alpha = \iint_B \left[\int_\beta^\gamma H(x, y, z)\,dz\right] dx\,dy$ en précisant B, β et γ ; en déduire $\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} J_\alpha$.

4° Exprimer J_α sous la forme $J_\alpha = \int_{\beta'}^{\gamma'} \left[\iint_{B'} H(x, y, z)\,dx\,dy\right] dz$ en précisant β', γ', et B' ; en déduire $\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} J_\alpha$ en fonction de I.

Partie V

1° Effectuer dans l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ le changement de variable $t = e^{-x}$, en justifiant sa validité.

2° Démontrer que : $\forall Y > 0$, $\int_1^Y \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx = -\int_Y^{2Y} \frac{e^{-x}}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$
et calculer : $\lim_{Y \to +\infty} \int_Y^{2Y} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$.

3° Étudier de même, pour $X > 0$, $\int_X^1 \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx$ et $\lim_{X \to 0} \int_X^{2X} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$.

4° En déduire une troisième méthode de calcul de I.